

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)

Final Event 1 (Individual)

香港數學競賽 (1999 – 2000)

決賽項目 1 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

- (i) 設 $[x]$ 表示小數 x 的整數部份。已知

$$[3.126] + \left[3.126 + \frac{1}{8}\right] + \left[3.126 + \frac{2}{8}\right] + \cdots + \left[3.126 + \frac{7}{8}\right] = P, \text{ 求 } P \text{ 的值。}$$

Let $[x]$ represents the integral part of the decimal number x . Given that

$$[3.126] + \left[3.126 + \frac{1}{8}\right] + \left[3.126 + \frac{2}{8}\right] + \cdots + \left[3.126 + \frac{7}{8}\right] = P, \text{ find the value of } P.$$

$P =$

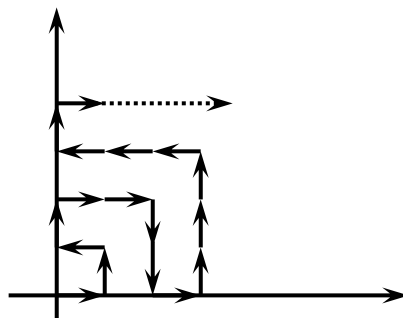
- (ii) 設 $a + b + c = 0$ 。已知 $\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} = P - 3Q$ ，求 Q 的值。

Let $a + b + c = 0$. Given that $\frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ac} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} = P - 3Q$, find the value of Q .

$Q =$

(iii) 在直角座標平面的第一象限中，把座標為整數的點按以下方法編號：

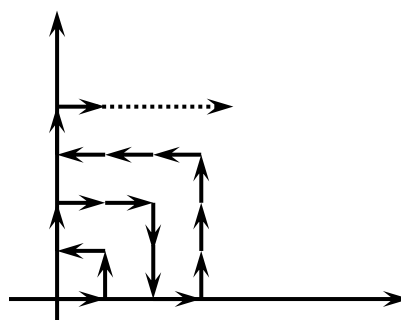
點 $(0, 0)$ 為第 1 號，
 點 $(1, 0)$ 為第 2 號，
 點 $(1, 1)$ 為第 3 號，
 點 $(0, 1)$ 為第 4 號，
 點 $(0, 2)$ 為第 5 號，
 點 $(1, 2)$ 為第 6 號，
 點 $(2, 2)$ 為第 7 號，
 點 $(2, 1)$ 為第 8 號，



已知 $(Q - 1, Q)$ 點為第 R 號，求 R 的值。

In the first quadrant of the rectangular co-ordinate plane, all integral points are numbered as follows,

point $(0, 0)$ is numbered as 1,
 point $(1, 0)$ is numbered as 2,
 point $(1, 1)$ is numbered as 3,
 point $(0, 1)$ is numbered as 4,
 point $(0, 2)$ is numbered as 5,
 point $(1, 2)$ is numbered as 6,
 point $(2, 2)$ is numbered as 7,
 point $(2, 1)$ is numbered as 8,



Given that point $(Q - 1, Q)$ is numbered as R , find the value of R .

$R =$

(iv) 當 $x + y = 4$ 時， $3x^2 + y^2$ 的最小值為 $\frac{R}{S}$ ，求 S 的值。

When $x + y = 4$, the minimum value of $3x^2 + y^2$ is $\frac{R}{S}$, find the value of S .

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)

Final Event 2 (Individual)

香港數學競賽 (1999 – 2000)

決賽項目 2 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

- (i) 如果 $\log_2(\log_4 P) = \log_4(\log_2 P)$ 及 $P \neq 1$ ，求 P 的值。

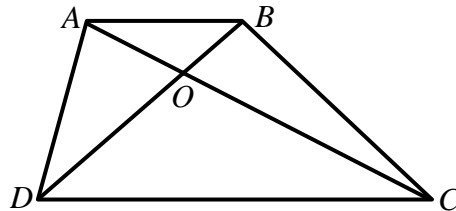
If $\log_2(\log_4 P) = \log_4(\log_2 P)$ and $P \neq 1$, find the value of P .

$P =$

- (ii) 在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ 。 AC 和 BD 相交於 O 。 三角形 AOB 和 COD 的面積分別為 P 和 25 。 已知梯形的面積為 Q ，求 Q 的值。

In the trapezium $ABCD$, $AB \parallel DC$. AC and BD intersect at O . The areas of triangles AOB and COD are P and 25 respectively. Given that the area of the trapezium is Q , find the value of Q .

$Q =$



- (iii) 當 1999^Q 被 7 除時，餘數為 R 。求 R 的值。

When 1999^Q is divided by 7, the remainder is R . Find the value of R .

$R =$

- (iv) 如果 $111111111111 - 222222 = (R + S)^2$ ，求 S 的值。

If $111111111111 - 222222 = (R + S)^2$, find the value of S .

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)

Final Event 3 (Individual)

香港數學競賽 (1999 – 2000)

決賽項目 3 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

- (i) 已知 $1+2+3+\cdots+1997+1998+1999+1998+1997+\cdots+3+2+1$ 的個位數是 P ，求 P 的值。

Given that the unit digit of

$1+2+3+\cdots+1997+1998+1999+1998+1997+\cdots+3+2+1$ is P , find the value of P .

$P =$

- (ii) 已知 $x + \frac{1}{x} = P$ 。如果 $x^6 + \frac{1}{x^6} = Q$ ，求 Q 的值。

Given that $x + \frac{1}{x} = P$. If $x^6 + \frac{1}{x^6} = Q$, find the value of Q .

$Q =$

- (iii) 已知 $\frac{Q}{\sqrt{Q} + \sqrt{2Q}} + \frac{Q}{\sqrt{2Q} + \sqrt{3Q}} + \cdots + \frac{Q}{\sqrt{1998Q} + \sqrt{1999Q}} = \frac{R}{\sqrt{Q} + \sqrt{1999Q}}$ ，求 R 的值。

Given that

$\frac{Q}{\sqrt{Q} + \sqrt{2Q}} + \frac{Q}{\sqrt{2Q} + \sqrt{3Q}} + \cdots + \frac{Q}{\sqrt{1998Q} + \sqrt{1999Q}} = \frac{R}{\sqrt{Q} + \sqrt{1999Q}}$, find the value of R .

$R =$

- (iv) 設 $f(0) = 0$ ； $f(n) = f(n-1) + 3$ 當 $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ 。如果 $2f(S) = R$ ，求 S 的值。

Let $f(0) = 0$; $f(n) = f(n-1) + 3$ when $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. If $2f(S) = R$, find the value of S .

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)

Final Event 4 (Individual)

香港數學競賽 (1999 – 2000)

決賽項目 4 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

- (i) 假設 $a + \frac{1}{a+1} = b - \frac{1}{b-1} - 2$ ，其中 $a \neq -1$ ， $b \neq 1$ 和 $a - b + 2 \neq 0$ 。已知 $ab - a + b = P$ ，求 P 的值。

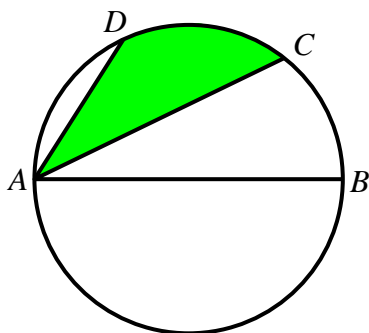
Suppose $a + \frac{1}{a+1} = b - \frac{1}{b-1} - 2$, where $a \neq -1$, $b \neq 1$, and $a - b + 2 \neq 0$.

Given that $ab - a + b = P$, find the value of P .

$P =$

- (ii) 在下圖中， AB 為圓的直徑。 C 和 D 把弧 AB 分為三等份。斜線面積為 P 。若圓的面積為 Q ，求 Q 的值。

In the following figure, AB is a diameter of the circle. C and D divide the arc AB into three equal parts. The shaded area is P . If the area of the circle is Q , find the value of Q .



$Q =$

- (iii) 已知兩個 Q 位數 $1111\dots11$ 和 $9999\dots99$ 的乘積中有 R 個數字是奇數，求 R 的值。

Given that there are R odd numbers in the digits of the product of the two Q -digit numbers $1111\dots11$ and $9999\dots99$, find the value of R .

$R =$

- (iv) 設 a_1, a_2, \dots, a_R 為正整數，其中 $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_{R-1} < a_R$ 。已知這 R 個正整數的和為 90 及 a_1 的最大值為 S ，求 S 的值。

Let a_1, a_2, \dots, a_R be positive integers such that $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_{R-1} < a_R$.
Given that the sum of these R integers is 90 and the maximum value of a_1 is S , find the value of S .

$S =$

Hong Kong Mathematics Olympiad (1999 – 2000)

Final Event 5 (Individual)

香港數學競賽 (1999 – 2000)

決賽項目 5 (個人)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.

- (i) 如果 $\left(\frac{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + \cdots + 1999 \times 3998 \times 7996}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 1999^3} \right)^{\frac{1}{3}} = P$ ，求 P 的值。

If $\left(\frac{1 \times 2 \times 4 + 2 \times 4 \times 8 + 3 \times 6 \times 12 + \cdots + 1999 \times 3998 \times 7996}{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 1999^3} \right)^{\frac{1}{3}} = P$, find the value of P .

$P =$

- (ii) 如果 $(x-P)(x-2Q)-1=0$ 有兩個整數根，求 Q 的值。

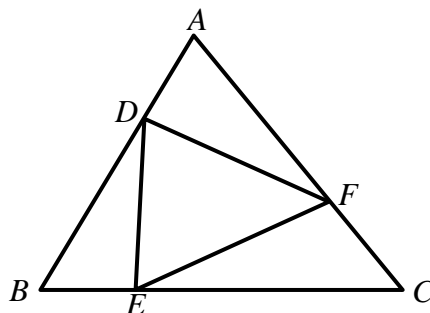
If $(x-P)(x-2Q)-1=0$ has two integral roots, find the value of Q .

$Q =$

- (iii) 已知 $\triangle ABC$ 的面積為 $3Q$ ； D 、 E 和 F 分別為 AB 、 BC 和 CA 上的點使得 $AD = \frac{1}{3}AB$ ， $BE = \frac{1}{3}BC$ ， $CF = \frac{1}{3}CA$ 。如果 $\triangle DEF$ 的面積為 R ，求 R 的值。

Given that the area of the $\triangle ABC$ is $3Q$; D , E and F are the points on AB , BC and CA respectively such that $AD = \frac{1}{3}AB$, $BE = \frac{1}{3}BC$, $CF = \frac{1}{3}CA$. If the area of $\triangle DEF$ is R , find the value of R .

$R =$



(iv) 已知 $(Rx^2 - x + 1)^{1999} \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{3998}x^{3998}$ 。

設 $S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{3997}$ ，求 S 的值。

Given that $(Rx^2 - x + 1)^{1999} \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{3998}x^{3998}$. If

$S = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{3997}$, find the value of S .

$S =$
